System theoretic descriptions of physical systems

Schaft, Abraham Jan van der

Publication date:
1983

SAMENVATTING

De grondgedachte van dit proefschrift kan reeds uitgelegd worden aan de hand van Newton's tweede wet $F = ma$, met a de versnelling van een deeltje met massa m en F de kracht die op dit deeltje wordt uitgeoefend. Laat $q \in \mathbb{R}^3$ de positie van het deeltje zijn, dan interpreteren we $F = ma$ als een *dynamische compatibiliteitsrelatie* tussen de kracht F en de positie q, beiden als functie van de tijd. Explicieter, het systeem verbonden met Newton's tweede hoofdwet bestaat uit alle paren $(q(\cdot),F(\cdot))$, met $q(\cdot) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ en $F(\cdot) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ functies van de tijd die voldoen aan $F(t) = m\ddot{q}(t)$ voor (bijna) alle $t \in \mathbb{R}$. We noemen dit een uitwendig systeem met uitwendige variabelen F en q. Merk op dat we de kracht F evenals q als een *basis*-variabele zien.

Uitgaande van dit uitwendige systeem kunnen we ook een *toestandsformulering* van $F = ma$ geven. Een (minimale) toestand is de vector $(q,p) \in \mathbb{R}^6$ met p de impuls van het deeltje. We verkrijgen de vergelijkingen

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} q \\ p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} q \\ p \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} u$$

met u de uitwendige variabele $u = F$. De andere uitwendige variabele $y = q$ is een functie van de toestand:

$$y = (1 \ 0)\begin{pmatrix} q \\ p \end{pmatrix}$$

Het systeem in toestandsvorm bestaat nu uit alle tijdsfuncties $(q(\cdot),p(\cdot),y(\cdot),F(\cdot))$ die voldoen aan de bovenstaande vergelijkingen. Newton's tweede wet gezien als uitwendig systeem in F en q of als systeem in toestandsvorm is het eenvoudigste voorbeeld van wat we een *Hamiltoniaans* systeem zullen noemen.

Twee vragen dienen zich nu aan. Waardoor wordt een Hamiltoniaans systeem (uitwendig of in toestandsvorm) gekarakteriseerd, en wat kunnen we zeggen over de eigenschappen van een Hamiltoniaans systeem ? Deze twee vragen worden bestudeerd in Hoofdstuk 3, het centrale hoofdstuk van dit proefschrift. Een definitie van een (niet-lineair) Hamiltoniaans systeem in toestandsvorm wordt gegeven. Het blijkt dat wiskundig gezien een Hamiltoniaans systeem wordt gekarakteriseerd door een symplectische structuur zowel op de toestandsruimte als op de ruimte van uitwendige variabelen. Anders gezegd, de toestand bestaat uit geconjugeerde variabelen q en p, en de uitwendige variabelen laten zich splitsen in geconjugeerde variabelen u en y, bijvoorbeeld de (gegeneraliseerde) krachten en (gegeneraliseerde) posities. De gegeven definitie omvat in ieder geval de Euler-Lagrange en de Hamilton vergelijkingen met uitwendige krachten. We merken op dat historisch gezien pas sinds het begin van deze eeuw de uitwendige krachten in de Euler-Lagrange en Hamilton vergelijkingen worden weggelaten. Ruw gesproken wordt nu in dit proefschrift de symplectische formulering van de Hamilton vergelijkingen zonder uitwendige krachten zoals gegeven in moderne tekstboeken als ABRAHAM & MARSDEN (1978) en ARNOLD (1978) uitgebreid naar de Hamilton vergelijkingen *met* uitwendige krachten (de "echte" Hamilton vergelijkingen zou ik willen zeggen). De gegeven definitie is echter ruimer en legt de nadruk op de dualiteit van uitwendige variabelen als krachten en posities. Zo omvat de definitie ook systemen waar de uitwendige variabelen de (extra) snelheden en de (inertiële) impulsen zijn.

Het blijkt dat de aldus gedefiniëerde Hamiltoniaanse systemen fraaie systeemtheoretische eigenschappen bezitten. Zo is een Hamiltoniaans systeem regelbaar dan en slechts dan als het waarneembaar is en wordt de symplectische structuur op de toestandsruimte uniek bepaald door het uitwendige systeem. Belangrijk is verder dat de klasse van Hamiltoniaanse systemen gesloten is onder interconnectie, hetgeen betekent dat de verbinding van Hamiltoniaanse systemen resulteert in een (gecompliceerder) Hamiltoniaans systeem.

Het probleem om een *uitwendig* Hamiltoniaans systeem te karakteriseren wordt slechts voor lineaire systemen volledig opgelost. Het blijkt dat het klassieke inverse probleem in de variatierekening als een speciaal geval van dit probleem beschouwd kan worden.

Als voorbereiding op Hoofdstuk 3 over Hamiltoniaanse systemen worden in Hoofdstukken 1 en 2 algemene (dus niet noodzakelijk Hamiltoniaanse) systemen met uitwendige variabelen behandeld in drie gevallen: verzamelingstheoretische systemen, lineaire systemen en differentiëerbare niet-lineaire systemen.

Voor lineaire systemen leggen we vooral de nadruk op de beschrijving in wat in regeltheoretische termen het frequentiegebied wordt genoemd. Vanuit een abstract meetkundig standpunt kan een uitwendig systeem in het frequentiegebied opgevat worden als een vectorbundel over de complex projectieve lijn $\mathbb{P}^1$. Daar deze vectorbundel een deelbundel is van een triviale bundel over $\mathbb{P}^1$ kunnen we ook een duale vectorbundel definiëren. Het blijkt dat de invarianten van beide bundels precies de regelbaarheids- en waarneembaarheidsindices van het systeem zijn.

In het tweede deel van Hoofdstuk 2 behandelen we niet-lineaire systemen met uitwendige variabelen in een differentiaalmeetkundig kader. Het gebruik van (co-)distributies en foliaties stelt ons in staat fundamentele systeemtheoretische eigenschappen als minimaliteit, waarneembaarheid, regelbaarheid en stuurinvariantie in eenzelfde stijl te definiëren en uit te werken.

In Hoofdstuk 4 veralgemenen we de gebruikelijke definities van symmetrieën en behoudswetten voor systemen zonder uitwendige invloeden tot systemen *met* uitwendige variabelen. Ruw gesproken bestaat een symmetrie nu uit een symmetrie op de toestandsruimte en een corresponderende symmetrie in het uitwendig gedrag van het systeem. Een behoudswet wordt gevormd door een functie van de toestand van het systeem waarvan de af-of toename een functie is van de uitwendige variabelen. Voor Hamiltoniaanse systemen laten we zien dat de klassieke stelling van Noether die zegt dat het bestaan van een symmetrie een behoudswet impliceert en omgekeerd, ook voor deze veralgemeende symmetrieën en behoudswetten geldt.

Verder definiëren we tijdsomkeerbaarheid van systemen. Ook hier blijkt dat een elegante definitie gegeven kan worden voor *uitwendige* systemen. De verzameling van uitwendige trajectoriën dient invariant te zijn onder omkering van de tijdsrichting. Toegepast op Hamiltoniaanse systemen geeft dit de belangrijke deelklasse van tijdsomkeerbare Hamiltoniaanse systemen, die wordt gekarakteriseerd door het feit dat de inwendige energie uit een kinetische en potentiële energieterm bestaat en dat de uitwendige variabelen gegeneraliseerde krachten en posities zijn.

In Hoofdstuk 5 richten we de aandacht op een klasse van systemen die op het niveau van definitie sterke overeenkomst vertonen met Hamiltoniaanse systemen, namelijk gradiënt-systemen. Het blijkt echter dat de systeemtheoretische eigenschappen van (vooral niet-lineaire) gradiënt-systemen veel minder fraai zijn dan in het Hamiltoniaanse geval.

Tenslotte leggen we in Hoofdstuk 6 een verbinding tussen de theorie van Hamiltoniaanse systemen enerzijds en optimale besturingsproblemen anderzijds, in het bijzonder via het zogeheten Maximum-principe.