

University of Groningen

Inductive types in constructive languages

Bruin, Peter Johan de

IMPORTANT NOTE: You are advised to consult the publisher's version (publisher's PDF) if you wish to cite from it. Please check the document version below.

Document Version

Publisher's PDF, also known as Version of record

Publication date:

1995

[Link to publication in University of Groningen/UMCG research database](#)

Citation for published version (APA):

Bruin, P. J. D. (1995). *Inductive types in constructive languages*. s.n.

Copyright

Other than for strictly personal use, it is not permitted to download or to forward/distribute the text or part of it without the consent of the author(s) and/or copyright holder(s), unless the work is under an open content license (like Creative Commons).

The publication may also be distributed here under the terms of Article 25fa of the Dutch Copyright Act, indicated by the "Taverne" license. More information can be found on the University of Groningen website: <https://www.rug.nl/library/open-access/self-archiving-pure/taverne-amendment>.

Take-down policy

If you believe that this document breaches copyright please contact us providing details, and we will remove access to the work immediately and investigate your claim.

Downloaded from the University of Groningen/UMCG research database (Pure): <http://www.rug.nl/research/portal>. For technical reasons the number of authors shown on this cover page is limited to 10 maximum.

Inductieve Typen in Constructieve Talen

Samenvatting

Deze dissertatie gaat over constructieve talen: talen om wiskundige constructies formeel in uit te drukken. Het begrip *constructie* omvat niet alleen berekeningen, zoals die in een programmeertaal kunnen worden uitgedrukt, maar ook beweringen en bewijzen, zoals die in een wiskundige logica kunnen worden uitgedrukt, en in het bijzonder de constructie van gestructureerde wiskundige objecten zoals rijtjes en bomen. *Typen* kan men zich voorstellen als klassen van zulke objecten, en *inductieve typen* zijn typen waarvan de objecten gegenereerd worden door productieregels.

Het doel van deze dissertatie is tweeledig. Ten eerste ben ik op zoek naar talen waarin de wiskundige zijn inspiraties goed gestructureerd, correct, en toch zo vrij mogelijk kan uitdrukken. Ten tweede wil ik de uiteenlopende benaderingen van inductieve typen in één kader samenbrengen, zodat men kan zien hoe de diverse constructie- en afleidingsregels uit een enkel basis-idee voortvloeien en ook hoe deze regels eventueel gegeneraliseerd kunnen worden. Als basis-idee gebruik ik het begrip *initiële algebra* uit de categorieëentheorie.

Mijn onderzoek naar wiskundige talen heeft niet tot een afgerond voorstel geleid. De huidige presentatie beperkt zich tot algemene overwegingen en een deels formele, deels informele beschrijving van een taal, ADAM. Deze dient vervolgens als medium voor de studie van inductieve typen, die het hoofdbestanddeel van de dissertatie vormt.

De opzet van ADAM is als volgt. Om de geldigheid van de in de taal geformuleerde argumenten te garanderen, heeft deze een degelijke grondslag. Hiervoor stel ik een constructieve type-theorie ATT samen, een combinatie van de “Intuitionistic Theory of Types” van P. Martin-Löf en de “Calculus of Constructions” van Th. Coquand. Teneinde alle wiskundige redeneervormen te kunnen omvatten, voeg ik de *iota*- of *descriptie*-operator van Frege toe. Het is niet noodzakelijk om inductieve typen als basisprincipe op te nemen; natuurlijke getallen volstaan om deze te construeren.

Op deze grondslag bouw ik vervolgens de taal ADAM door te bezien hoe we constructies en bewijzen die ik tegenkwam of zelf opstelde zo natuurlijk mogelijk maar wel volgens de regels van typetheorie kon opschrijven. De formele definitie van ADAM, voor zover beschikbaar, en haar semantiek in termen van de onderliggende type-theorie worden gelijktijdig gegeven door een twee-niveau-grammatica. Dit maakt het in beginsel mogelijk de taal naar behoefte met behoud van geldigheid uit te breiden met notaties of deeltalen voor speciale toepassingen, zoals programmacorrectheid. De voorgestelde notaties dienen dan ook niet als onaantastbaar te worden beschouwd. Het enige kenmerkende taalelement is wellicht de notatie voor (en het consistente gebruik van) *families* van objecten.

Als voorbereiding op inductieve typen geef ik eerst de klassieke benaderingen van inductieve definities weer, waarna ik de benodigde machinerie in ADAM introduceer – de beginselen van categorieëentheorie en algebra.

De kern van de verhandeling wordt gevormd door de beschrijving en rechtvaardiging van inductieve typen als initiële algebra's. Eerst beschouw ik op abstract niveau de

diverse manieren waarop inductieve typen gespecificeerd kunnen worden en hoe deze specificaties (in de vorm van een polynomiale functor) een algebra-signatuur bepalen, eventueel met gelijkheden. Vervolgens analyseer en generaliseer ik de manieren waarop recursieve functies op een inductief type gedefinieerd kunnen worden. Dan zie ik in hoeverre deze constructieprincipes gedualiseerd kunnen worden tot co-inductieve typen, ofwel finale co-algebra's. Ten slotte construeer ik, uitgaande van hetzij elementaire verzamelingenleer of typetheorie, daadwerkelijk initiële algebra's en finale co-algebra's voor een willekeurige polynomiale functor, en bewijs daarmee de relatieve consistentie van alle beschreven constructieprincipes ten opzichte van ADAM's typetheorie ATT.

Het voorgaande wordt aangevuld met de behandeling van enkele aan inductieve typen verwante onderwerpen. Ten eerste zijn dat recursieve datatypen met partiële objecten, zoals die in programmeertalen voorkomen waarbij men rekening moet houden met mogelijk niet-terminerende programmadelen. Ik vat de benodigde domeintheorie samen, en construeer zulke domeinen in ADAM uitgaande van finale co-algebra's. Verder bespreek ik kort inductieve typen in impredicatieve talen, typen als verzameling van type-vrije objecten, en het principe van bar-recursie, en doe ik een suggestie voor de inductieve definitie van nieuwe type-universa binnen een typetheorie. Ten slotte geef ik enkele verdere overwegingen over wiskundige taal en bewijsnotatie, en vat de benaderingen van inductieve typen samen.

De appendices bevatten de basisprincipes van de verzamelingenleer en van ATT, de benodigde toevoeging van de iota-operator ofwel bewijs-eliminatie aan typetheorie, en een studie naar uniformiteits-eigenschappen (*natuurlijkheid*) van polymorfe objecten, die ik in enkele gevallen nodig heb.

Omslag-diagram

Aanschouw het wiskundig universum,
zich ontwikkelend van oorspronkelijke eenheid
tot categorische dualiteit.

De centrale straal bevat
het initiële en het finale type,
samen met de overige platte eindige typen.

Zij worden geflankeerd door de duale principes
van gegeneraliseerde som en product
en van initiële en finale dekpunt-constructie.