Theory and history of geometric models

Polo-Blanco, Irene

Publication date:
2007

Resumen

En la segunda mitad del siglo XIX se descubrieron nuevas curvas y superficies algebraicas, además de otros objetos geométricos. Con el fin de facilitar el estudio de dichos objetos, numerosos matemáticos comenzaron a construir modelos que harían posible su visualización. De esta manera, se pudo pasar del objeto abstracto matemático al modelo concreto, facilitándose enormemente el estudio y el descubrimiento de las propiedades de dichos objetos. En muchas de las universidades los modelos han estado en exposición a lo largo de los años, apreciados no sólo por su valor didáctico y científico, sino también por el artístico.

Encontramos un importante ejemplo de construcción de modelos en Alemania. Matemáticos como Felix Klein o Alexander von Brill diseñaron numerosos modelos. Entre los años 1880 y 1935 dichos modelos fueron construidos utilizando materiales como escayola, cuerda, metal, etc. y distribuidos de forma masiva por las compañías alemanas L. Brill y M. Schilling a universidades europeas y americanas. El catálogo de M. Schilling de 1911 describe 40 series, con un total de casi 400 modelos.

Hoy en día podemos encontrar estas colecciones alemanas en numerosas universidades europeas. En el transcurso de esta tesis nos centraremos en el estudio, desde un punto de vista histórico y matemático, de la colección de modelos de la Universidad de Groningen. Dicha colección abarca alrededor de 150 modelos. Gran parte de ella proviene de las compañías alemanas mencionadas anteriormente y constituirá el tema central de la tesis.

El capítulo 1 es una introducción histórica a esta parte de la colección.

En él comenzaremos estudiando diversos aspectos de los modelos en Alemania y en Holanda, centrándonos más adelante en la colección de Groningen. En concreto intentaremos averiguar cuándo adquirió la Universidad de Groningen la colección de modelos, qué profesores estuvieron a cargo de su adquisición y cuál era su utilización. En este capítulo nos planteamos también la posibilidad de que muchos de los modelos fueran destruidos tras el incendio de 1906 del edificio académico de la universidad. Describiremos también los aspectos considerados en la realización del inventario de la colección, así como la restauración de muchos de los modelos. Todos los modelos de escayola de esta colección fueron restaurados en 2005 por el escultor Cayetano Ramírez López. Muchos de los modelos de cuerda han sido también restaurados por el ca- tedrático de álgebra y geometría Marius van der Put.

Los capítulos 2, 3 y 4 constituyen la parte más matemática de la tesis. En ellos estudiamos en detalle las superficies y curvas algebraicas representadas por algunos de los modelos de M. Schilling. En concreto, el capítulo 2 está dedicado al estudio de superficies cúbicas. Una superficie cúbica se define como el conjunto de ceros (en el espacio tridimensional) de un polinomio de grado 3. Arthur Cayley y George Salmon demostraron en 1849 que las superficies cúbicas sin singularidades sobre los números complejos contienen exactamente 27 rectas. Alfred Clebsch definió la *superficie diagonal* que tiene la propiedad de tener todas las 27 rectas reales. Una de las representaciones afines de esta superficie viene dada por la ecuación $x^3 + y^3 + z^3 + 1 - (x + y + z + 1)^3 = 0$. Cabe notar que el modelo alemán de esta superficie no se encuentra en la colección de Groningen. Por este motivo, el escultor Ramírez López construyó un modelo en escayola de la superficie diagonal, en el que se pueden apreciar las 27 rectas y su geometría.

Clebsch demostró en 1871 que las superficies cúbicas sobre los complejos se pueden obtener en función del espacio lineal de curvas cúbicas planas que pasan por seis puntos dados (en posición general). En particular una base $\{f_1, \ldots, f_4\}$ de dicho espacio nos proporciona una parametrización $p \mapsto (f_1(p) : \ldots : f_4(p))$ de la superficie cúbica. En una terminología más moderna, lo anterior equivale a decir que toda superficie cúbica sobre los complejos se puede obtener como la *explosión* de seis puntos (en posición general). En el transcurso del capítulo proporcionaremos un algoritmo para obtener los seis puntos para una superficie cúbica dada, y lo daremos explícitamente para ciertas superficies cúbicas reales. Más adelante contestaremos la pregunta de qué superficies cúbicas admiten tal parametrización sobre los números reales. Finalizaremos estudiando twists de superficies cúbicas sobre los números racionales.

El capítulo 3 está dedicado al estudio de diversos modelos de curvas algebraicas. En particular nos centraremos en estudiar dos grupos de modelos pertenecientes a dos series distintas de M. Schilling. Ambos grupos ilustran la clasificación de las curvas cúbicas reales en el plano dada por Möbius. La segunda parte del capítulo está dedicada al estudio de modelos de curvas espaciales.

En el capítulo 4 describimos la clasificación de Karl Rohn de las superficies regladas de grado four. Una superficie reglada en el espacio tridimensional está formada por líneas rectas. En el capítulo se asumirá que la superficie también es el conjunto de ceros de un polinomio de grado cuatro. La clasificación de Rohn viene dada en términos de las singularidades de la superficie. El caso real da lugar a varias superficies, 10 de las cuales están representadas por los 10 modelos de cuerda que componen la Serie XII (catálogo de M. Schilling). A lo largo del capítulo daremos una interpretación moderna del método utilizado por Rohn para obtener las ecuaciones de grado cuatro de las superficies.

Para finalizar, estudiaremos en el capítulo 5 un grupo de modelos de poliedros, hechos de cartón, de la colección de Groningen. Dichos modelos representan secciones tridimensionales de los politopos regulares en cuatro dimensiones y fueron construidos por la matemática amateur Alicia Boole Stott al final del siglo XIX. Boole Stott redescubrió los seis politopos regulares conocidos comúnmente por los nombres: hipertetraedro, hipercubo, hiperoctahedro, 24-cell, 120-cell, y 600-cell. Estos politopos son los análogos en cuatro dimensiones a los Sólidos Platónicos: tetraedro, cubo, octaedro, dodecaedro e icosaedro. La presencia de dichos modelos en la Universidad de Groningen se debe a la colaboración de Boole Stott con el geómetra Pieter Hendrik Schoute, ca- tedrático de la época en dicha universidad. Durante las celebraciones en 1914 del 300 aniversario de la Universidad de Groningen, Boole Stott recibió un doctorado honorario. En el transcurso del capítulo relataremos la vida de Boole Stott y describiremos sus principales descubrimientos en el ámbito de la geometría de cuatro dimensiones.