

University of Groningen

## Aanstekelijke wiskundelessen met lucifers

Roorda, Gerrit; de Haan, Dédé; Minderhoud, Marjon

*Published in:*  
Didactiek voor Vak en Beroep

**IMPORTANT NOTE: You are advised to consult the publisher's version (publisher's PDF) if you wish to cite from it. Please check the document version below.**

*Document Version*  
Publisher's PDF, also known as Version of record

*Publication date:*  
2021

[Link to publication in University of Groningen/UMCG research database](#)

*Citation for published version (APA):*  
Roorda, G., de Haan, D., & Minderhoud, M. (2021). Anstekelijke wiskundelessen met lucifers. *Didactiek voor Vak en Beroep*, 1(1), 32-37.

### Copyright

Other than for strictly personal use, it is not permitted to download or to forward/distribute the text or part of it without the consent of the author(s) and/or copyright holder(s), unless the work is under an open content license (like Creative Commons).

The publication may also be distributed here under the terms of Article 25fa of the Dutch Copyright Act, indicated by the "Taverne" license. More information can be found on the University of Groningen website: <https://www.rug.nl/library/open-access/self-archiving-pure/taverne-amendment>.

### Take-down policy

If you believe that this document breaches copyright please contact us providing details, and we will remove access to the work immediately and investigate your claim.

*Downloaded from the University of Groningen/UMCG research database (Pure): <http://www.rug.nl/research/portal>. For technical reasons the number of authors shown on this cover page is limited to 10 maximum.*

Gerrit Roorda, Dédé de Haan & Marjon Minderhoud

# Aanstekelijke wiskundelessen met lucifers

Als wiskundedidactici van RUG en NHL Stenden Hogeschool werken wij met twee scholen aan een project gericht op het versterken van probleemoplossen in wiskundelessen. De gedachte in dit project is dat een aanpak die we kennen uit Japan, genaamd Teaching through Problem-Solving (TTP) ook in Nederland goed bruikbaar is. Deze TTP-aanpak is gericht op het vergroten van wiskundig begrip maar stimuleert ook probleemoplossingsvaardigheden. We combineren in het project TTP met Lesson Study, waarbij docenten samenwerken rondom het ontwikkelen, geven en evalueren van de ontwikkelde lessen. In dit artikel beschrijven we de TTP-aanpak en illustreren dat met een voorbeeld van een luciferopdracht.

## Wat is Teaching Through Problem-Solving?

Stel je voor, een wiskundeles in de brugklas begint met de volgende opdracht: Jullie zien hier een opdracht waarin van een luciferpatroon figuur 1, 2, en 3 gelegd zijn. Ik daag je uit om uit te zoeken hoeveel lucifers je nodig hebt voor figuur 5, en straks ook figuur 11 (zie Figuur 1). Schrijf je berekening zo op dat een ander je uitleg kan snappen.

Dit zou, mogelijk met nog wat extra enthousiasme en eventueel met luciferpatronen bij de hand, de start van een TTP-les kunnen zijn. De basisgedachte van Teaching

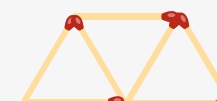
Through Problem-Solving (TTP) is dat leerlingen nieuwe wiskunde leren vanuit probleemoplossingsactiviteiten (Takahashi, Lewis, & Perry, 2013). Kenmerkend voor TTP is dat in de reken- of wiskundeles één probleem centraal staat waarvoor leerlingen zelf eerst een oplossing moeten vinden. Alle oplossingsmethoden zijn welkom. Het probleem is zorgvuldig gekozen in een leerlijn van een bepaald onderwerp. De bedoeling is dat in het vervolg van de les verschillende, vooraf geselecteerde oplossingen van de leerlingen besproken worden. Hier is de

## Voorbeeld: lucifers

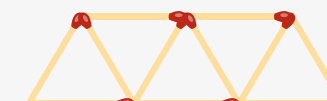
De opdracht is: Hieronder zie je figuur 1, 2, en 3 van een luciferpatroon.



figuur 1

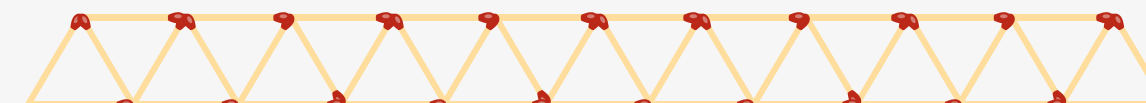


figuur 2



figuur 3

Hoeveel lucifers zijn nodig voor figuur 5? En voor figuur 11, die hieronder ook is afgebeeld?



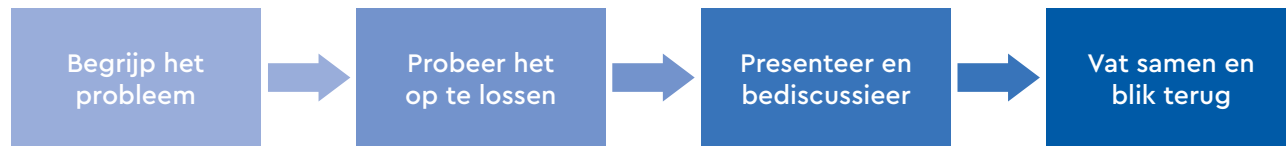
figuur 11

Figuur 1. Voorbeeld van een TTP-opdracht

hoofdgedachte dat leerlingen hun denken verwoorden, dat je kunt leren van elkaars denkwijze, maar ook van elkaars fouten. De volgorde van bespreken is zo gekozen dat de bespreking bij zal dragen aan het behalen van het lesdoel. De les sluit af met een fase van terugblik en samenvatten.

In Japan is TTP breed verspreid (zie bijvoorbeeld Fujii, 2016). Er is een leerlijn van problemen en theorie uitgezet waarin wiskundige kennis steeds verder wordt uitgebreid. Deze leerlijn is uitgewerkt in schoolboeken met name voor de basisschool en de onderbouw. De lessen waarin probleemoplossingen centraal staat, worden afgewisseld met

lessen waarin theorie gepresenteerd en geoefend wordt. Onderzoeken geven aanwijzingen dat het exploreren van problemen vóórdat instructie wordt gegeven, tot een beter begrip van leerlingen kan leiden, vergeleken met de aanpak van 'eerst instructie, dan oefenen' (zie bijvoorbeeld DeCaro & Rittle Johnson, 2012). In Japan blijken de TTP-lessen bij te dragen aan versterken van probleemoplossingsvaardigheden en ook houding: de durf om een probleem aan te pakken. Ook Nederlandse leerlingen zullen in onze ogen baat hebben bij deze aanpak vanwege mogelijke verbetering van enerzijds het wiskundige begrip en anderzijds probleemoplossingsvaardigheden.



Figuur 2: De fases van een TTP-les

**De fases in een TTP-les**

De fases in een TTP-les zijn weergegeven in Figuur 2 (zie bijv. Groves et al., 2016). De docent presenteert het probleem, liefst op een uitdagende manier. Als de leerlingen werken aan het probleem scant de docent welke strategieën ze toepassen als voorbereiding op de volgende fase. Vervolgens worden oplossingsmethoden besproken, vaak volgens een van tevoren vastgestelde volgorde. Tijdens het gesprek stelt de docent denkvragen en noteert dingen op het bord; de docent verbindt oplossingswijzen met elkaar en vat samen. Tabel 1 geeft een samenvatting van wat leerlingen en docenten doen in de verschillende fases.

In fase 3 wordt de tijd genomen voor het uitwisselen van oplossingsstrategieën en redeneringen van leerlingen waarbij leerlingen hun denkproces verwoorden én waarbij de docent probleemoplossingsvaardigheden expliciet maakt (Takahashi et al, 2013). Het gesprek over oplossingen kan leerlingen helpen de eigen aanpak onder woorden te brengen, het probleem vanuit meerdere perspectieven te bekijken en te leren van elkaar (Lester & Cai, 2016). Wiskundig denken van leerlingen kan bevorderd worden door te benadrukken dat er niet altijd één goede oplossing of aanpak is (Lester & Cai, 2016) en dat het vinden van goede aanpak-

ken ook kan verlopen door eerst onjuiste routes te bewandelen. Docenten dienen daarbij te vermijden om te snel in de 'uitlegstand' te komen. Deze fases samen duren in totaal zeker 30 tot 40 minuten.

Voorafgaand aan de beschreven fases moet helder geformuleerd zijn wat het doel van de les is. Naast vakinhoudelijke doelen zijn er ook doelen gericht op probleemoplossingsvaardigheden en mogelijk ook op attitude.

**Een voorbeeld: De luciferopdracht**

In ons project hebben we een eerste ervaring opgedaan met de opdracht over lucifers (Fig. 1). Aan de hand van deze opdracht verduidelijken we de TTP-fases. In een online-les

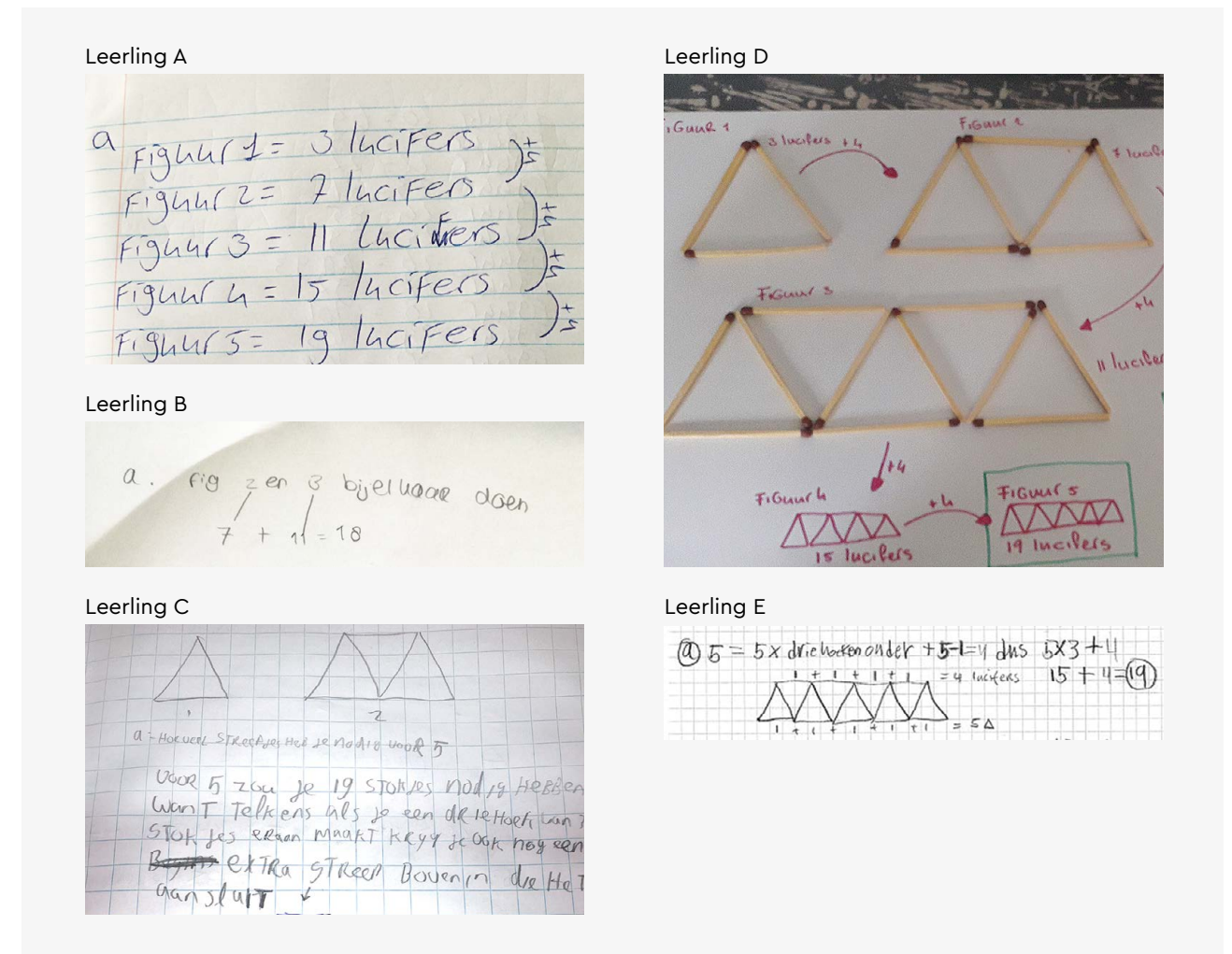
zijn de eerste twee fases uitgevoerd, maar vanwege de corona-situatie zijn fase 3 en 4 nog niet uitgevoerd. Op basis van de echte gegevens van fase 1 en 2 beschrijven we een mogelijke opzet van alle vier de fases.

De doelen die in deze les aan de orde komen zijn: (1) leerlingen kunnen uitleggen waarom het aantal lucifers elk volgend figuur 4 toeneemt; (2) leerlingen kunnen voor het aantal lucifers een formule maken; en (3) leerlingen durven het probleem aan te pakken door iets uit te proberen.

In fase 1 heeft de docent van een brugklas de leerlingen in een online-les uitgedaagd om de luciferopdracht op te lossen. De leerlingen blijken verschillende oplossingsmanieren (fase 2) te hebben bedacht (zie voor een selectie, Figuur 3).

	Leerlingen	Docent
<b>Begrijp het probleem</b>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Doe je best om het probleem te begrijpen;</li> <li>• Denk erover na wat je zou kunnen helpen om het probleem aan te pakken.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Bedenk of er mogelijk bepaalde voorkennis opgehaald moet worden;</li> <li>• Presenteer het probleem helder;</li> <li>• Probeer leerlingen te interesseren voor het probleem;</li> <li>• Ondersteun leerlingen om in hun eigen kennis te zoeken naar kennis die ze kunnen gebruiken.</li> </ul>
<b>Probeer het op te lossen</b>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Probeer zelf te zoeken naar een oplossing;</li> <li>• Alle manieren om op te lossen zijn toegestaan, dus het gaat niet om de oplossing die de docent mogelijk wil horen;</li> <li>• Overleg mogelijk na enige tijd met klasgenoten.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Loop rond en noteer aanpakken;</li> <li>• Identificeer aanpakken die centraal gepresenteerd en bediscussieerd worden;</li> <li>• Ondersteun leerlingen die nog geen begin hebben met een hint;</li> <li>• Daag leerlingen die snel een antwoord hebben uit met verdiepvragen.</li> </ul>
<b>Presenteer en bediscussieer</b>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Presenteer je ideeën; licht je ideeën toe als klasgenoten vragen hebben;</li> <li>• Probeer actief te begrijpen wat je klasgenoot bedacht heeft.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Selecteer strategisch welke leerlingen (vaak circa 3) je kiest voor toelichting, ook onjuiste oplossingen kunnen gekozen worden;</li> <li>• Monitor de discussie;</li> <li>• Gebruik interactieprincipes zoals doorvragen, doorspelen, terugleggen, stemmen om leerlingen te ondersteunen de wiskundige essentie te leren.</li> </ul>
<b>Vat samen en blik terug</b>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Denk na over wat je hebt geleerd;</li> <li>• Neem samenvatting over;</li> <li>• Reflecteer op het geleerde.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Vat samen wat geleerd moet worden met het oog op de doelen van de les;</li> <li>• Laat leerlingen samenvatting overnemen;</li> <li>• Benoem relevante probleemoplossingsvaardigheden.</li> </ul>

Tabel 1: Overzicht van TTP-fases gebaseerd op de website van The Lesson Study Group at Mills college, (<https://lessonresearch.net/teaching-problem-solving/overview>)



Figuur 3. Oplossingen van vijf leerlingen

De oplossingen bieden veel aanknopingspunten voor een klasgesprek in fase 3. We hebben de oplossingen van Fig. 3 geselecteerd omdat ze kunnen bijdragen aan het halen van de doelen.

Opmerkingen en overwegingen daarbij:

1. Er zijn leerlingen die de opdracht nog niet hebben opgelost. Elke leerling die wat geprobeerd heeft moet de credits krijgen voor het durven proberen. Mogelijk kan een leerling uitleggen waarom het nog niet lukt. De docent moet de leerlingen richten op het feit dat het niet gaat om het antwoord, maar om het delen van je ideeën.
2. Leerling B zou de klas kunnen uitleggen hoe hij geredeneerd heeft. Het lijkt erop dat deze leerling figuur 2 en 3 'aan elkaar plakt' om figuur 5 te krijgen. Bij het gesprek over de oplossingen zal de docent de luciferpatronen paraat moeten hebben (zie Fig 4). Besproken zou kunnen worden: Hoe kun je als leerling je oplossingen checken (probleemoplossingsvaardigheid!) en ontdekken dat er nog een lucifer ontbreekt?
3. De combinatie van leerling A en C maakt inzichtelijk waar het + 4 patroon vandaan komt. Je plakt er steeds een patroontje aan (zie tekening van leerling C). Leerling D kan toevoegen dat je begint met 3 lucifers en dan nog 4 keer het patroontje van 4 lucifers toevoegt. Dus voor figuur 5 moet je bij de 3 beginlucifers nog  $(5 - 1)$  keer het patroon van 4 lucifers toevoegen. Het totaal aantal lucifers voor een willekeurige figuur is dan  $A = 3 + (\text{nummer} - 1) \times 4$ . (Mogelijk is er ook een leer-

ling die kan uitleggen dat de formule ook geschreven kan worden als  $A = -1 + \text{nummer} \times 4$ ).

4. Leerling E blijkt op een andere manier naar de figuur te kijken en komt zo op een andere regel. Deze aanpak is prachtig gevonden en zal in deze les wel genoemd kunnen worden. De aanpak is echter niet gericht op het geformuleerde lesdoel. De keuze zou kunnen zijn om deze oplossing alleen kort toe te laten lichten. In de vierde fase van de les zou de docent kunnen vragen naar voor- en nadelen van verschillende manieren, en benadrukken dat het mooi is dat er zoveel oplossingen zijn bedacht. Ook oplossingen die veel tijd kosten (tellen), zijn goede aanpakken. Vaak kun je je eigen ideeën controleren! En wat betreft de inhoud: door gestructureerd je gegevens van figuren 2, 3, 4, 5 op te schrijven kun je een patroon ontdekken. Elke keer komt er 4 bij. Dit kun je in een regel opschrijven.

### Implementatie van TTP in een school met Lesson Study

Wij verkennen op dit moment met twee wiskundesecties of en hoe de beschreven TTP-lesaanpak in de Nederlandse context uitgevoerd kan worden. Een groep van 3 - 5 wiskundeleraars ontwikkelt, geeft en evalueert TTP-lessen in een Lesson Study-cyclus. Door in een Lesson Study-setting de les voor te bereiden en de leerlingen te observeren kunnen aanwijzingen gevonden worden of het probleem goed gekozen is, of de leerlingen in staat zijn om tot oplossingen te

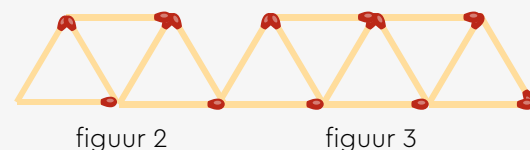


Fig 4. Patroon 2 en 3 aan elkaar geplakt.

komen, of de onderlinge discussie in de klas goed is verlopen en hoe de les bijdraagt aan het behalen van het gekozen doel.

Een conclusie van de luciferles hierboven zou bijvoorbeeld kunnen zijn dat het beter is voor het begrip van de leerlingen om niet naar de vijfde figuur te vragen, maar naar de zesde. Daarmee wordt voorkomen dat het getal 4 in twee verschillende betekenissen voorkomt (4 keer het patroon van 4 lucifers die toegevoegd worden). Daarnaast heeft dit luciferpatroon een complexiteit, omdat de meest eenvoudige lineaire formule die erbij past het 'startgetal' -1 heeft. Een patroon met aan elkaar gelegde vierkantjes zou dit voorkomen (zie bijvoorbeeld Groves et al., 2016)

Een gecombineerde aanpak van LS en TTP is in internationale context geïmplementeerd en onderzocht, bijvoorbeeld in de VS (Takahashi et al., 2013) en Australië (Groves et al., 2016), en blijkt daar bruikbaar voor het introduceren van een meer probleemgerichte aanpak in wiskundelessen en het curriculum. Uitdagingen blijken te liggen in het kiezen van goede opdrachten binnen de context van het eigen land, en het veranderen van de 'cultuur' in de wiskundeles (Groves et al., 2016). In ons project is de ondersteuning van docenten gericht op deze zaken.

De komende tijd hopen we te ontdekken wat deze aanpak de docenten oplevert. We zijn in de fase dat de eerste les ontwikkeld is en gegeven wordt. Hierbij worden we wel gehinderd door de vele onzekerheden rond corona-maatregelen en de hoge werkdruk die juist ook nu wordt ervaren. Maar tegelijkertijd is er veel enthousiasme voor het samen nadenken over wiskundeopdrachten en wiskundeonderwijs. Wij denken dat het mooi zou zijn als in Nederland zowel bij rekenlessen in de basisschool, als bij wiskundelessen in het voortgezet onderwijs vaker en meer gestructureerd gebruik gemaakt wordt van de TTP-aanpak en de inhoudelijke samenwerking van een docententeam. We hopen dat onze aanpak aanstekelijk werkt.

### Literatuur

- DeCaro, M. S., & Rittle-Johnson, B. (2012). Exploring mathematics problems prepares children to learn from instruction. *Journal of experimental child psychology*, 113(4), 552-568.
- De Vries, S., & Roorda, G. (2019). Het leren van docenten in een Lesson Study Team: een casestudie. *Pedagogische Studiën*, 96(6), 401-422.
- Groves, S., Doig, B., Vale, C., & Widjaja, W. (2016). Critical factors in the adaptation and implementation of Japanese Lesson Study in the Australian context. *ZDM, the International Journal on Mathematics Education*, 48, 501-512.
- Fujii, T. (2016). Designing and adapting tasks in lesson planning: a critical process of Lesson Study. *ZDM, the International Journal on Mathematics Education* 48, 411-423.
- Lester, F. K., & Cai, J. (2016). Can Mathematical Problem Solving Be Taught? Preliminary Answers from 30 Years of Research. In P.L. Felmer, E.Pekhonen & J. Kilpatrick, *Posing and solving mathematical problems*. Springer.
- Lewis, C., Perry, R., & Murata, A. (2006). How should research contribute to instructional improvement? The case of Lesson Study. *Educational Researcher*, 35(3), 3-14.
- Takahashi, A., Lewis, C., & Perry, R. (2013). A US lesson study network to spread teaching through problem solving. *International Journal of Lesson and Learning Studies*, 2, 237-255.

**Gerrit Roorda** is vakdidacticus wiskunde en lerarenopleider aan zowel de Rijksuniversiteit Groningen als aan de Masteropleiding Leraar Wiskunde van NHL Stenden Hogeschool.

**Marjon Minderhoud** is lerarenopleider aan de bacheloropleiding Leraar Wiskunde van NHL Stenden Hogeschool.

**Dédé de Haan** is vakdidacticus wiskunde, lerarenopleider en onderzoeker aan de bacheloropleiding Leraar Wiskunde van NHL Stenden Hogeschool.