On approximations, complexity, and applications for copositive programming

Gijben, Luuk

Publication date:
2015

Samenvatting

In deze thesis onderzoeken wij een aantal eigenschappen met betrekking tot de copositieve en compleet positieve kegel, gemotiveerd door resultaten binnen de copositieve optimalisatie. Deze twee kegels zijn respectievelijk gedefinieerd als:

$$\mathcal{COP}^n := \{A \in \mathbb{S}^n \mid \mathbf{x}^\mathsf{T} A \mathbf{x} \geq 0 \text{ voor iedere } \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n_+\},$$
$$\mathcal{CP}^n := \{A \in \mathbb{S}^n \mid \ A = \sum_{i=1}^{k} \mathbf{b}_i \mathbf{b}_i^\mathsf{T},\ \mathbf{b}_i \geq 0 \text{ voor iedere } i\},$$

en zijn elkaars duale kegel.

We bestudeerden als eerste de complexiteit van het lidmaatschap probleem van de beide kegels. Het is een bekend resultaat dat de complexiteit van het verifiëren van copositiviteit co-NP-compleet is. Daarentegen was de complexiteit van het nagaan of een matrix compleet positief is onbekend. In deze thesis bevestigen we het verwachte resultaat dat het lidmaatschap probleem van de compleet positieve kegel NP-moeilijk is. Sterker, we laten zien dat zowel het zwakke als het sterke lidmaatschap probleem voor zowel de copositieve alsmede de compleet positieve kegel tot de klasse NP-moeilijk behoort.

We onderzochten tevens de eigenschap van onverkleinbaarheid met betrekking tot de kegel van niet-negatieve matrices, zijnde een zwakkere versie van extremaliteit. In het bijzonder verstrekken wij een voldoende en noodzakelijke voorwaarde voor een copositieve matrix om onverkleinbaar te zijn. Voor de 5×5 copositieve kegel geven wij een volledige beschrijving van alle onverkleinbare matrices. Daarnaast, laten wij zien dat elke 5×5 copositieve matrix die niet de som is van een niet-negatieve en een positief-semidefiniete matrix kan worden geschreven als de som van een niet-negatieve matrix en een enkele onverkleinbare matrix. Het laatstgenoemde resultaat hebben wij vervolgens gebruikt om te laten zien dat de copositieve kegel kan worden gereduceerd tot de niveau één Parrilo kegel met behulp van specifieke schalingen.

We bewijzen verder het resultaat dat we elke matrix, welke niet de som van een niet-negatieve en een positief-semidefiniete matrix is, uit elke willekeurige niveau r Parrilo kegel kan worden geschaald voor $r \geq 1$ en $n \geq 5$. Voor de niveau één Parrilo kegel geven we een expliciete manier om dergelijke schalingen te kunnen construeren. Vervolgens onderzochten we schalingen in de tegenovergestelde richting en leerden we dat een algoritme dat dergelijke schalingen kan produceren geen polynomiale rekentijd kan hebben tenzij P= NP. We introduceerde het begrip van niet-negatieve schalingen, dit zijn schalingen die niet in staat zijn een matrix uit een bepaald niveau van een hiërarchie te schalen. We geven daarnaast een voorbeeld van een niet-negatieve schaling die in staat is om matrices naar beneden te schalen in (onder andere) de Parrilo hiërarchie.

Tenslotte verstrekken we een toepassing in de vorm van een copositieve formulering van het graaf isomorphisme probleem en laten we zien dat we isomorphisme kunnen vaststellen met behulp van een eindig niveau van enkele benadering hiërarchieën voor de copositieve kegel. Vervolgens worden er en aantal alternatieve formuleringen voorgesteld, waarvan er één een mogelijke methode impliceert om een certificaat te construeren dat laat zien dat het graaf isomorphisme probleem tot P behoort.