Aspects of algorithmic algebra

Vidunas, Raimundas

Publication date:
1999

Samenvatting

De twee thema's van dit proefschrift, namelijk het *symbolisch oplossen van differentiaalvergelijkingen* en de *algebraïsche theorie van splines*, zijn grotendeels onafhankelijk. Wat ze verbindt is de algebraïsche en algoritmische aanpak en de motivatie afkomstig van computer algebra.

Differentiaalvergelijkingen, het eerste onderwerp, gaat met name over de vergelijking

$$(1) \qquad y'' = r(x)\, y,$$

waarbij $r(x)$ een rationale functie in x is met bijvoorbeeld complexe coëfficiënten. Dus $r(x) = \frac{t(x)}{n(x)} \in \mathbb{C}(x)$ waarbij $t(x), n(x) \in \mathbb{C}[x]$ veeltermen zijn met complexe getallen als coëfficiënten. Net als bij gewone vergelijkingen (met bijvoorbeeld rationale coëfficiënten)

$$(2) \qquad x^d + a_{d-1}x^{d-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = 0$$

bestaat er voor (1) een "Galois theorie", nu met de naam "differentiaal Galois theorie". Die theorie produceert een lichaam L van "functies" waarin de vergelijking (1) twee onafhankelijke oplossingen heeft. Een minimaal gekozen L heet het Picard-Vessiot lichaam van vergelijking (1). De differentiaal Galois groep G van (1) wordt gegeven als de collectie van alle automorfismen van L die op $\mathbb{C}(x)$ de identiteit zijn en met de differentiatie op L commuteren. De collectie van alle oplossingen $V \subset L$ van (1) is een lineaire ruimte over $\mathbb{C}$ van dimensie 2. Elke $\sigma \in G$ werkt als een inverteerbare lineaire afbeelding op V. In feite kan men G identificeren met een speciale ondergroep van $\mathrm{GL}(V) = \mathrm{GL}(2, \mathbb{C})$. Het speciale is dat de elementen in G determinant 1 hebben en bovendien voldoen aan polynoomvergelijkingen in de vier coëfficiënten van de 2×2 matrices die een $\sigma \in G$ representeren. Zo'n groep heet een algebraïsche ondergroep van $\mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$, de groep van de twee bij twee matrices met determinant 1.

De differentiaal Galois groep $G \subset \mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$ geeft informatie over de oplossingen van (1). Als G een echte ondergroep is van $\mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$ dan kan men "gesloten formules" voor de oplossingen van (1) afleiden. Als daarentegen $G = \mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$ dan bestaan zulke gesloten formules niet. Eén en ander is vergelijkbaar met de gewone Galois theorie. De Galois groep H van (2) is een ondergroep van de groep van alle permutaties van de oplossingen van (2). Als H een "oplosbare" groep is dan kan (2) worden opgelost met "gesloten formules".

Voor de berekening van de differentiaal Galois groep en gesloten formules voor oplossingen van (1) is een algoritme ontwikkeld door J. Kovacic. Dit algoritme is gebaseerd op het feit dat $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$ maar weinig (conjugatie klassen van) algebraïsche ondergroepen heeft. Een aantal algebraïsche ondergroepen van $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$ zijn:

$$\text{de Borel groep } \mathbb{B} = \{\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix} \mid a,b \in \mathbb{C},\ a \neq 0\};$$

$$\text{de multiplicatieve groep } \mathbb{G}_\mathrm{m} = \{\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix} \mid a \in \mathbb{C},\ a \neq 0\};$$

$$\text{de oneindige diëder groep } \mathbb{D}_\infty =$$

$$\{\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix} \mid a \in \mathbb{C},\ a \neq 0\} \cup \{\begin{pmatrix} 0 & a^{-1} \\ -a & 0 \end{pmatrix} \mid a \in \mathbb{C},\ a \neq 0\}.$$

De hoofdstukken 2 en 3 en een deel van hoofdstuk 4 van dit proefschrift beschrijven zo expliciet mogelijk alle vergelijkingen (1) met differentiaal Galois groep respectievelijk $\mathbb{B}$, $\mathbb{G}_\mathrm{m}$ en $\mathbb{D}_\infty$. Verder behandelt hoofdstuk 4 transformaties op de vergelijking (1) gegeven door substituties $x = \phi(t)$ waarbij $\phi(t) \in \mathbb{C}(t)$. De bedoeling is om hierdoor een vergelijking met eenvoudiger differentiaal Galois groep te verkrijgen.

Het tweede onderwerp van dit proefschrift is **2-dimensionale splines**. Een 1-dimensionale spline is een speciale funktie op bijvoorbeeld een segment $[a,b] \subset \mathbb{R}$. Het “speciale” is dat zo’n funktie ontstaat door het segment $[a,b]$ in deelsegmenten te knippen en op ieder deelsegment een polynoomfunctie van een zekere graad voor te schrijven. Als die polynoomfunkties goed aansluiten dan is het resultaat een reële funktie op $[a,b]$ die een aantal malen continue differentiëerbaar is. Het praktische belang is dat men een gegeven gecompliceerde funktie, zeg $f : [a,b] \to \mathbb{R}^2$, door een 1-dimensionale spline benaderen kan. Die spline maakt het bovendien mogelijk om de grafiek van f in de $\mathbb{R}^3$ snel en nauwkeurig door een computer te laten tekenen. Splines vormen dan ook de basis van CAGD (Computer Aided Geometric Design).

In hoofdstuk 5 worden splines bestudeerd die gedefiniëerd zijn op een gebied $D \subset \mathbb{R}^2$. Zo’n gebied wordt getrianguleerd, d.w.z. in driehoeken geknipt. De triangulatie heet Δ en $C_k^r(\Delta)$ is de lineaire ruimte van de splines (d.w.z. per driehoekje een polynoomfunktie van twee variabelen) waarvan de graden beperkt zijn door k en die r maal continu differentiëerbaar zijn. Formules voor de dimensie van de reële lineaire ruimte $C_k^r(\Delta)$ en algoritmen voor het produceren van bases voor $C_k^r(\Delta)$ worden ontwikkeld. Hierbij wordt het werk van L.J. Billera en L.L. Rose e.a. gevolgd, maar effectievere presentaties gegeven.

In hoofdstuk 6 wordt, aansluitend bij het werk van J.M. Hahn e.a., een abstrakt CG^1 complex X ingevoerd, dat formaliseert hoe (bijvoorbeeld) de driehoeken van het complex, één maal differentiëerbaar aan elkaar vast zitten. Er wordt bewezen dat X een unieke struktuur van C^1-differentiëerbare varieteit heeft. Met behulp van splines op X wordt X als oppervlak in de $\mathbb{R}^3$ (indien mogelijk) getekend. De belangrijkste resultaten van hoofdstuk 6 zijn eveneens dimensie formules en algoritmen voor het produceren van een basis van de ruimte $C_k^1(X)$ van de 1-maal differentiëerbare splines met graad begrensd door k. De vele plaatjes laten de praktische toepasbaarheid van de theorie zien.