Particle dynamics of branes

Ploegh, André René

Publication date:
2008

Nederlandse Samenvatting

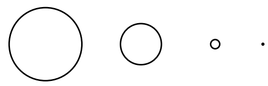
Dit proefschrift heeft als doel een methode te ontwikkelen waarmee braanoplossingen[1] eenvoudiger kunnen worden geformuleerd. Hieronder wordt getracht deze zin uit te leggen op een zo'n simpel mogelijke manier en tevens een beknopt overzicht te geven van wat er in dit proefschrift behandeld wordt. We beginnen met een korte introductie in de snarentheorie en gaan dan over op de aspecten die in dit proefschrift worden behandeld.

In de elementaire deeltjes fysica worden de "bouwstenen"van de materie om ons heen beschreven. Men zoomt als het ware met een sterke microscoop in op een materiaal en kijkt waaruit dat bestaat. Een voorbeeld van een bouwsteen is het elektron. In de natuurkunde is de microscoop een deeltjesversneller. De krachtigste versneller, de LHC, gaat binnenkort van start in CERN nabij Genève. Door de botsingen van deeltjes te bestuderen kan men veel leren over de bouwstenen van onze wereld.

Naast deze bouwstenen zijn er ook krachten. Er zijn op dit moment vier krachten bekend in ons universum. Laten we beginnen met de sterke en zwakke kernkracht en het elektromagnetisme. De eerste twee krachten spelen bijvoorbeeld een rol bij het (in)stabiel zijn van de atoomkern. Elektromagnetisme speelt een rol bij bijvoorbeeld elektriciteit en magnetisme. De bouwstenen en deze drie krachten zijn in de loop van de twintigste eeuw in één theorie samengevat. Dit model heet het standaardmodel. Gerard 't Hooft en Martinus Veltman hebben een belangrijke rol gespeeld bij het consistent maken van dit model. Hiervoor ontvingen zij in 1999 de Nobelprijs voor de natuurkunde.

De vierde en meest bekende kracht is de zwaartekracht. In 1915 gaf Albert Einstein een goede verklaring voor dit verschijnsel via de algemene relativiteitstheorie. Eén van de grote uitdagingen in de moderne natuurkunde is het ontwikkelen van één model dat alle vier krachten plus de elementaire deeltjes samenvat. Tot nu toe is men niet in staat geweest om een succesvolle theorie op te stellen die uitgaat van puntdeeltjes. Hiermee wordt bedoeld dat de bouwstenen van het model geen interne structuur

[1] Het Engelse woord membrane wordt in het Nederlands vertaald als membraan. Vandaar dat hier het woord braan gebruikt wordt voor het Engelse woord brane.

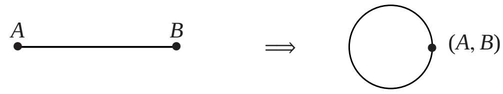


Figuur D.0.1: Hier zien we vier keer dezelfde cirkel met afnemende straal. In het vierde plaatje is het verschil met een punt niet meer te zien.

hebben zoals bij een punt. Nu komt de snarentheorie om de hoek kijken. Zoals de naam al zegt zijn de "bouwstenen"van deze theorie geen puntdeeltjes maar snaren. Waar een bewegend puntdeeltje een lijn in de tijd beschrijft, beschrijft een bewegende snaar een twee-dimensionale oppervlakte. Immers de snaar zelf is één-dimensionaal (denk aan een lijn) maar als de snaar beweegt kun je je dit voorstellen als een twee-dimensionaal oppervlakte in de ruimte-tijd. De ruimte-tijd kun je je voorstellen als een kaart waarbij ook de tijd is aangegeven.

Het idee achter de snarentheorie is, dat alle deeltjes en krachten opgevat kunnen worden als verschillende trillingen van de snaar. Als de snaar op de juiste manier trilt gedraagt het zich bijvoorbeeld als een elektron. Als de snaartjes maar klein genoeg zijn, lijkt het voor ons als waarnemers net alsof het puntdeeltjes zijn. We moeten heel goed inzoomen willen we een snaartje zien in plaats van een puntdeeltje. Denk bijvoorbeeld aan een cirkel, dit is een voorbeeld van een gesloten snaar. Als we de straal van de cirkel heel erg klein kiezen lijkt het een punt, zie figuur D.0.1. In de natuurkunde geldt, dat hoe meer men wil inzoomen des te meer moeite men moet doen, oftewel des te meer energie men in het systeem moet stoppen. Of de LHC in staat is om de snaren te detecteren is maar zeer de vraag. De karakteristieke lengte van een snaar is ongeveer 10^{-35} meter, terwijl de LHC niet verder kan "inzoomen"dan 10^{-19} meter (waar bijvoorbeeld $10^{-1} = 0.1$, $10^{-2} = 0.01$ enzovoort).

Hoe simpel deze uitbreiding op het eerste gezicht ook lijkt, een snaar in plaats van een punt, de fysische consequenties zijn groot. We noemen een aantal in het oogspringende eigenschappen. Wil de snarentheorie werken dan vereist de theorie een tien-dimensionale ruimte! Ter vergelijking: Wij kunnen slechts drie ruimtelijke dimensies zien (denk bijvoorbeeld aan een kubus). Samen met de tijd spreken we van een vier-dimensionale ruimte-tijd. Deze ogenschijnlijke tegenstelling tussen vier en tien kan worden opgelost door te "compactificeren". Laten we dit uitleggen aan de hand van een voorbeeld. We nemen aan dat de overige zes dimensies heel erg klein zijn. Dit kan bijvoorbeeld door aan te nemen dat elk van de zes dimensies de vorm heeft van een cirkel, zie figuur D.0.2. Als we de straal erg klein kiezen dan zullen deze extra dimensies niet te zien zijn voor ons, denk aan figuur D.0.1. De sterkste versneller op dit moment kan lengtes tot 10^{-19} meter detecteren. Willen we geen tegenspraak hebben dan betekent dit dat de grootst mogelijke lengte van de extra



Figuur D.0.2: De linker lijn stelt een extra dimensie voor. Om ervoor te zorgen dat we deze dimensie niet kunnen zien nemen we aan dat deze dimensie de vorm heeft van een (hele kleine) cirkel zoals weer gegeven in het rechter plaatje. We verbinden hierbij de punten A en B met elkaar.

dimensies 10^{-19} meter is[2].

De oplettende lezer zal op dit moment zeggen: "Waarom zou ik stoppen bij een snaar?". We zouden net zo goed als bouwsteen een membraan kunnen gebruiken. Dit is een twee-dimensionaal object, denk bijvoorbeeld aan een vel papier. In een tien-dimensionale wereld kunnen we dit concept snel uitbreiden tot het idee van een braan. Dit zijn hoger-dimensionale versies van de membranen. De algemene naamgeving is p-braan. De p geeft het aantal ruimtelijke dimensies aan van de braan. We nemen aan dat ook de tijd onderdeel is van de braan. De totale oppervlakte van de braan bestaat dus uit $(p+1)$ dimensies[3]. Kortom een p-braan stelt een $(p+1)$-dimensionaal oppervlakte voor. Dit oppervlakte noemen we het *wereldvolume* van de braan. Bijvoorbeeld een 0-braan is een puntdeeltje (de tijd vormt een één-dimensionaal wereldvolume) en een 1-braan is een snaar (samen met de tijd geeft dit een twee-dimensionaal wereldvolume). Het mooie van wiskunde is dat het werken met tien dimensies geen probleem is. Het is niet fundamenteel anders dan werken met "slechts"vier dimensies. Een voorstelling hiervan in je hoofd maken is daarentegen een heel ander verhaal…

Het interessante van de snarentheorie is dat deze hoger-dimensionale branen automatisch verschijnen in de theorie als men deze analyseert. In zekere zin is de naam snarentheorie dus onjuist! De reden dat we beginnen met snaren in plaats van branen is dat men nog niet goed weet hoe om te gaan met branen. Dit is een openstaand probleem in de snarentheorie.

Maar ook de snarentheorie zelf is nog niet volledig ontwikkeld. De zogeheten perturbatieve beschrijving van de theorie heeft zich in de afgelopen twintig jaar flink ontwikkeld. Met het woord perturbatief bedoelen we dat er een kleine koppelingsconstante is. Dit betekent ruwweg dat de interacties tussen de objecten in de theorie zwak zijn. Dankzij de ontwikkelingen van de perturbatieve snarentheorie weten we dat de hierboven beschreven branen onderdeel van de theorie zijn. Deze branen zijn als het

[2]Er bestaan ook andere manieren om extra dimensies te hebben die we niet zien zonder aan te nemen dat ze klein zijn. Dit kan bijvoorbeeld door zogeheten braan-wereld modellen.

[3]We hoeven overigens de tijd niet perse als onderdeel van de braan te zien. In dat geval is de naamgeving nog steeds zo dat een p-braan een $(p+1)$-dimensionaal oppervlakte voorstelt. We noemen zo'n braan een Sp-braan.

ware de niet-perturbatieve kant van de snarentheorie. Als de koppelingsconstante groot is en de interacties dus sterk zijn, spelen branen een belangrijke rol.

Een ander intrigerend aspect is dat in het niet-perturbatieve regime van de theorie een extra dimensie ontstaat. Dit kan men zich het beste voorstellen aan de hand van een cirkel. De koppelingsconstante bepaalt de grootte van de straal. Als de koppelingsconstante groter wordt, wordt de straal langer. Op een gegeven moment kan men dus een extra dimensie "zien". Denk hierbij aan figuur D.0.1 waarbij je nu van rechts naar links kijkt. Door het ontstaan van de extra dimensie hebben we dus niet een tien- maar een elf-dimensionale theorie. Deze elf-dimensionale theorie wordt M-theorie genoemd. Er is weinig bekend over deze theorie[4], alleen dat de bouwstenen geen snaren zijn maar 2- en 5-branen.

Echter het feit dat we de niet-perturbatieve kant van de snarentheorie niet kennen, hoeft niet perse een probleem te zijn. De huidige versnellers zijn bij lange na niet krachtig genoeg om de energieschaal van snaren te benaderen (vergelijk maar de lengtes 10^{-35} meter en 10^{-19} meter). Het is dus belangrijk om de snarentheorie (en M-theorie) bij lage energie te bestuderen. Het blijkt dat er vijf verschillende lage energielimieten zijn van de snarentheorie. Het idee is dat al deze vijf theorieën op een andere manier kijken naar M-theorie. Net zoals bijvoorbeeld de zes kanten van een dobbelsteen allemaal deel uit maken van dezelfde dobbelsteen.

Deze vijf theorieën zijn voorbeelden van de zogeheten superzwaartekracht. Dit is een uitbreiding van de algemene relativiteitstheorie van Einstein met extra deeltjes. De theorie heeft verder een extra symmetrie genaamd supersymmetrie. Dit is een symmetrie die fermionen (zoals bijvoorbeeld het elektron) relateert aan bosonen (bijvoorbeeld het graviton wat de zwaartekracht overbrengt). Alle deeltjes in de natuur zijn of bosonen of fermionen. Dit verklaart ook de naam, het combineert *super*symmetrie met de zwaartekracht. In dit proefschrift zullen we ons beperken tot deze lage energielimieten.

Een ander interessant aspect van snarentheorie is dat het geïntroduceerd wordt als een theorie die de wereld beschrijft op het allerkleinste niveau. Oftewel bij hele hoge energieschalen. Wanneer bevond ons universum zich in een hoge energetisch toestand? Observaties in de sterrenkunde laten zien dat ons heelal steeds groter wordt. Gaan we dus ver terug in de tijd dan is de voor de hand liggende conclusie dat er ooit een moment is geweest waarop alle materie in ons heelal op één punt samenkwam. Dit moment wordt de Big Bang of oerknal genoemd. Het allereerste moment van ons universum moet dus beschreven worden door de snarentheorie! Ook al is de snarentheorie in eerste instantie een theorie die het allerkleinste beschrijft, uiteindelijk heeft het dus ook veel te zeggen over het heelal als geheel. Dit is ook op een andere manier te zien. De snarentheorie tracht alle vier de krachten die wij kennen in één theorie samen te vatten. Zwaartekracht is dan automatisch een onderdeel van de theorie. Op grote afstanden is het juist de zwaartekracht die regeert en dus de

[4]Zelfs waar de letter M voorstaat is niet echt bekend.

evolutie van ons universum bepaalt. Dit wordt bestudeerd in de kosmologie.

In dit proefschrift zal de nadruk liggen op het bestuderen van de branen die voorkomen in de lage energielimieten van de snarentheorie. Het doel is om een methode te ontwikkelen die het vinden van expliciete braanoplossingen eenvoudiger maakt. In principe kunnen we de vergelijkingen, die volgen uit de lage energielimiet van snarentheorie, proberen op te lossen. Echter die vergelijkingen zijn erg moeilijk om exact op te lossen. Zoals vaker in de natuurkunde zullen we daarom gebruik maken van symmetrieën om het probleem te simplificeren.

Laten we dit uitleggen aan de hand van een concreet voorbeeld. Denk aan een vel papier. Dit is een twee-dimensionaal object oftewel een 2-braan in onze taal. Zoals gezegd, dit twee-dimensionale oppervlakte noemen we het wereldvolume van de braan. Als we voor het gemak even de tijd vergeten kunnen we een derde richting loodrecht op dit papier voorstellen. Te samen met het twee-dimensionale wereldvolume hebben we een drie-dimensionale ruimte. Wij gaan op zoek naar braanoplossingen die alleen afhangen van de derde dimensie loodrecht op het papier. De twee dimensies van het wereldvolume spelen hierdoor geen rol. Waar we ons op het wereldvolume ook bevinden de oplossing gedraagt zich hetzelfde, want alleen de derde richting heeft invloed op deze braanoplossing. Als we het vel papier samendrukken tot een klein propje is de situatie dus eigenlijk nog hetzelfde! Zoals gezegd, dit noemen we compactificeren of het *oprollen* van dimensies. Het probleem is hierdoor ineens een stuk eenvoudiger op te lossen. In plaats van na te gaan hoe een vel papier zich gedraagt in de drie-dimensionale ruimte hebben we slechts een punt dat zich in één dimensie kan voort bewegen! Deze aanpak van het oprollen van dimensies van het wereldvolume (het vel papier) is een belangrijk onderdeel van de techniek die in dit proefschrift wordt toegepast. De effectieve beschrijving van de braan (vel papier) is dus weer een puntdeeltje. Dit verklaart de titel van het proefschrift, namelijk "de deeltjes dynamica van branen". Hetzelfde kunnen we doen met alle andere branen.

Omdat we met deze truc het hele wereldvolume hebben laten verdwijnen spreken we van een (-1)-braan. Immers onze telling was zo dat een p-braan een $(p+1)$-dimensionaal wereldvolume vormt en in ons geval is er geen wereldvolume meer (dat wil zeggen $0 = -1 + 1$ oftewel $p = -1$).

We moeten nu onderscheid maken naar waar de tijd zich bevindt. Als de tijd deel uitmaakt van het oorspronkelijke wereldvolume noemen we het een (-1)-braan of instanton. Merk op dat na het oprollen van het wereldvolume ook de tijd verdwenen is! Hoe raar dit ook mag lijken voor ons, wiskundig is er (zoals zo vaak) niks aan de hand. Als de tijd geen deel uitmaakt van het (oorspronkelijke) wereldvolume noemen we het een S(-1)-braan. Na het oprollen van het wereldvolume is de tijd dus nog wel aanwezig. De oorspronkelijke braan heet een Sp-braan. Het verschil met een p-braan is dus dat de tijd geen deel uitmaakt van het wereldvolume (zie ook voetnoot 3 op pagina 161).

We zullen ook nog een andere vorm van oprollen (compactificeren) beschouwen.

In plaats van het oprollen van het wereldvolume beschouwen we nu (op één na) de richtingen loodrecht op de braan als irrelevant. Hiermee bedoelen we dat de oplossing weer niet afhangt van die loodrechte richtingen. Dit is een stukje moeilijker voor te stellen, maar ook dit kan men wiskundig hard maken. De effectieve theorie bestaat dan na het oprollen uit het wereldvolume en nog één loodrechte richting.

Ook hier moeten we weer onderscheid maken waar de tijd zich bevindt. Als de tijd een onderdeel is van het wereldvolume spreken we na het oprollen van domain-walls (in slecht Nederlands domein-muren). Hierbij kan men ook letterlijk aan een muur denken. Als je in een omgeving van een domain-wall zou leven, zou je, als je van links naar rechts loopt, halverwege een "muur"tegenkomen.

Als daarentegen de tijd de enige overgebleven loodrechte richting is, noemen we de oplossing een kosmologie. Het verschil met S(-1)-branen heeft te maken met een extra term in de vergelijkingen. Deze extra term noemen we de potentiaal en verschijnt standaard bij het oprollen van richtingen loodrecht op het wereldvolume. De aanwezigheid van de potentiaal maakt het probleem een stuk complexer om op te lossen.

Kortom, na het oprollen hebben we dus vier verschillende situaties. Namelijk instantonen (of (-1)-branen), S(-1)-branen, domain-walls en kosmologieën. We zien dus dat alle branen uiteindelijk gerelateerd kunnen worden aan één van deze vier verschillende mogelijkheden[5], zie ook figuur 3.5.1. Elk van deze oplossingen wordt apart geanalyseerd in dit proefschrift. Vooral de eerste twee type oplossingen (instantonen en S(-1)-branen) blijken exact te kunnen worden opgelost met deze truc die we hier hebben beschreven. Als we deze vier oplossingen hebben gevonden gaan we de opgerolde dimensies weer uitrollen en krijgen we een oplossing van de oorspronlijke p-braan!

Het proefschrift bestaat uit de volgende hoofdstukken.

In hoofdstuk 2 geven we een korte introductie in de snarentheorie. Hierbij ligt de focus op het introduceren van de branen.

In hoofdstuk 3 laten we zien hoe branen effectief te beschrijven zijn als deeltjes. Als we over het wereldvolume van een braan reduceren leidt dit tot instantonen en S(-1)-branen. Als we over de richtingen loodrecht op de braan reduceren krijgen we domain-walls of kosmologieën. Op deze manier zien we dat alle branen gerelateerd kunnen worden aan deze vier type branen.

In hoofdstuk 4 beginnen we met het oplossen van de Sp-branen. Hiervoor moeten we de S(-1)-branen oplossen. Dit doen we door middel van een genererende oplossing. Een genererende oplossing is de meest simpele oplossing die toch alle informatie van de S(-1)-braan in zich heeft. Elke andere S(-1)-braanoplossing is hieruit te verkrijgen. Daarna gaan we de reductie ongedaan maken en laten we zien hoe de bijbehorende Sp-braan eruit ziet.

[5]Er is één uitzondering. De zogeheten 7-branen kunnen niet op deze manier beschreven worden om een technische reden.

In hoofdstuk 5 bestuderen we kosmologieën. Dit betekent dat we een braan reduceren over de transversale ruimte en we krijgen dan een potentiaal. We introduceren eerst een bepaald type kosmologie, namelijk die bekend staat onder de naam "generalized assisted inflation". Daarna laten we zien hoe we ondanks de aanwezigheid van de potentiaal toch veel over het systeem te weten kunnen komen.

In hoofdstuk 6 gaan we verder met het bestuderen van de kosmologieën. We laten zien dat er een directe link is met de domain-walls. Dit heet de domain-wall / kosmologie correspondentie. Ruwweg komt dit erop neer dat voor een gegeven kosmologie men direct een domain-wall oplossing kan formuleren en *vice versa*. De nadruk zal liggen op het bestuderen van hoe deze correspondentie in detail werkt binnen superzwaartekrachten.

In hoofdstuk 7 gaan we de stap maken naar instantonen. We beperken ons hier tot de instantonen die behoren tot het zogeheten $\mathrm{SL}(p+q, \mathbb{R})/\,\mathrm{SO}(p,q)$ systeem. We leiden af wat de genererende oplossing is. Daarna bekijken we het effect van het toevoegen van een potentiaal.

In hoofdstuk 8 presenteren we de conclusies en geven we een paar suggesties voor verder onderzoek.

Er zijn ook nog vier appendices toegevoegd. Appendix A geeft veel gebruikte conventies en formules voor de algemene relativiteitstheorie. Appendix B behandelt de spinoren conventies, welke worden gebruikt in hoofdstuk 6. Appendix C geeft een korte introductie in Lie groepen en Lie algebra's. In appendix D tot slot geven we een overzicht van de gepubliceerd artikelen waarop dit proefschrift (deels) is gebaseerd.