University of Groningen

Duality in stochastic linear and dynamic programming

Klein Haneveld, Willem Karel

IMPORTANT NOTE: You are advised to consult the publisher's version (publisher's PDF) if you wish to cite from it. Please check the document version below.

Document Version

Publisher's PDF, also known as Version of record

Publication date:

1985

[Link to publication in University of Groningen/UMCG research database](#)

Citation for published version (APA):

Klein Haneveld, W. K. (1985). *Duality in stochastic linear and dynamic programming*. s.n.

Copyright

Other than for strictly personal use, it is not permitted to download or to forward/distribute the text or part of it without the consent of the author(s) and/or copyright holder(s), unless the work is under an open content license (like Creative Commons).

The publication may also be distributed here under the terms of Article 25fa of the Dutch Copyright Act, indicated by the "Taverne" license. More information can be found on the University of Groningen website: <https://www.rug.nl/library/open-access/self-archiving-pure/taverne-amendment>.

Take-down policy

If you believe that this document breaches copyright please contact us providing details, and we will remove access to the work immediately and investigate your claim.

Downloaded from the University of Groningen/UMCG research database (Pure): <http://www.rug.nl/research/portal>. For technical reasons the number of authors shown on this cover page is limited to 10 maximum.

SAMENVATTING

DUALITEIT IN DE STOCHASTISCHE LINEAIRE EN DYNAMISCHE PROGRAMMERING

In dit proefschrift worden onderwerpen uit de stochastische lineaire programmering (SLP) en uit de stochastische dynamische programmering (SDP) behandeld. In beide deelgebieden van de mathematische beslis-kunde representeert de stochastiek de onzekerheid van de modelbouwer omtrent de waarde van sommige parameters. Wanneer de beslissingen niet van de realisaties van de stochastische parameters mogen afhangen kan een conceptueel probleem ontstaan. Zo is een lineair programmeringsprobleem waarvan niet alle coëfficiënten gegeven getallen zijn in wezen ongedefinieerd. In de SLP worden daarom additionele specificaties gemaakt om te komen tot eenduidig gedefinieerde probleemstellingen. Dit kan op verscheidene manieren. Welke manier wordt gekozen zal onder meer afhangen van de wijze waarop risico en risico-aversie worden gemodelleerd. Het resultaat is veelal een niet-lineair programmeringsprobleem. In de gebruikelijke SDP modellen daarentegen treedt dit conceptueel probleem niet op, omdat van meet af aan de formulering is aangepast aan de aanwezigheid van stochastische parameters.

Tevens wordt aandacht besteed aan lineaire programmeringsproblemen met kansmaten als 'beslissingsvariabelen'; zulke problemen duiden we aan met LPM. Diverse probleemstellingen in de kansrekening kunnen als LPM geïnterpreteerd worden. Een bekend voorbeeld is het momenten probleem: bepaal een kansverdeling op een gegeven domein die voorgeschreven waarden heeft voor sommige momenten en waarvoor bijvoorbeeld de kans op een bepaalde gebeurtenis maximaal is. Ondanks de schijn van het tegendeel zijn LPM problemen ook relevant voor SLP en SDP. Enerzijds blijkt namelijk, dat SDP problemen speciale gevallen van LPM problemen zijn. Anderzijds is van de stochastische coëfficiënten in SLP problemen dikwijls slechts beperkte informatie over de verdeling beschikbaar. In dit proefschrift wordt bijvoorbeeld een geval bestudeerd waarbij alleen de waardebereiken en de gemiddelde waarden van de marginale verdelingen bekend zijn. Als men dan een robuuste oplossing zoekt, ligt het voor de hand om de simultane kansverdeling zo ongunstig mogelijk te specificeren. Zo'n ongunstige kansverdeling kan beschreven worden als de oplossing van een LPM probleem; de bijbehorende beperkingen geven dan weer, dat de verdeling in overeenstemming moet zijn met de beschikbare informatie.

Een belangrijk hulpmiddel voor de bestudering van mathematische programmeringsproblemen is de dualiteitstheorie. In deze theorie wordt uitgaande van het oorspronkelijke probleem een zogenaamd duaal optimaliseringsprobleem gedefinieerd, en de relatie tussen beide problemen verschaft inzicht in de eigenschappen van optimale oplossingen. Met name wordt hier gedacht aan voldoende voorwaarden voor stabiliteit: in dat geval hebben beide problemen dezelfde optimale waarde, en is het bestaan van optimale duale oplossingen gegarandeerd. Voor stabiele problemen zijn de Karush-Kuhn-Tucker voorwaarden (of, in het lineair geval, de complementaire spelingsrelaties) noodzakelijk en voldoende voor optimaliteit. In dit proefschrift wordt de dualiteitstheorie van convexe (veelal lineaire) programmeringsproblemen toegepast, niet alleen in Euclidische ruimten maar ook in 'abstracte' lineaire ruimten, met maten of functies als elementen.

Het proefschrift kan ruwweg in twee delen worden opgesplitst. Het eerste deel, de hoofdstukken 1-3, is de gemeenschappelijke inleiding voor het tweede deel, de hoofdstukken 4-8. Na de algemene inleiding en samenvatting in hoofdstuk 1 wordt in hoofdstuk 2 de dualiteitsstelling voor convexe programmeringsproblemen in abstracte ruimten geformuleerd die in volgende hoofdstukken wordt toegepast. In hoofdstuk 3 wordt een aantal SLP modellen besproken. Eerst wordt ingegaan op modellen met kansbeperkingen en modellen met correctie acties (recourse actions), en op de onderlinge relaties. Vervolgens wordt aandacht besteed aan de overeenkomsten en de verschillen tussen meer-stadia SLP modellen en SDP modellen. De hoofdstukken 1, 2 en 3 bevatten geen nieuwe resultaten, al worden sommige elementen van hoofdstuk 3 in de SLP literatuur veelal te weinig belicht.

Het tweede deel bestaat uit hoofdstukken die onafhankelijk van elkaar gelezen kunnen worden. In hoofdstuk 4 wordt een algemeen kader geformuleerd waarbinnen de relaties tussen abstracte lineaire programmeringsproblemen, in het bijzonder LPM problemen, en hun dualen goed kunnen worden beschreven. Speciale aandacht wordt besteed aan drie LPM problemen:

- (i) een gegeneraliseerd momenten probleem, en varianten daarvan,
- (ii) een probleem met gegeven marginalen,
- (iii) een SDP probleem over een eindige horizon.

In alle gevallen wordt als duaal probleem gebruikt in LPM problemen neer maten, representeren teitscondities. Het b hoofdstuk 2 goed toep strikt noodzakelijk, van ieder van de prob resultaten afleiden o

In hoofdstuk 5 w naam "geïntegreerde k kansbeperkingen beper verschil is evenwel d omvang waarmee de bep modellen met ICC's ov laatste type worden k niet noodzakelijk bij aantrekkelijke concep boven gewone kansbepe dualiteitstheorie aan tussen sommige modell

Het is bekend da worden opgelost door cursie goed is gedefi evenwel alleen bij ei in het algemene geval met de meetbaarheid v relatie tussen het SD stuk 4 is bestudeerd blemen, worden in ho garanderen dat de reo zijn voor het bestaan seerd op een meetbare van normale integrand worden beschouwd, en elders in de literatu

In alle gevallen wordt een approximatieprobleem in een functieruimte als duaal probleem geformuleerd. De complementaire spelingsrelaties, die in LPM problemen neerkomen op voorwaarden voor de dragers van de kansmaten, representeren voor ieder van de drie problemen bekende optimaliteitscondities. Het blijkt, dat de algemene dualiteitsstelling van hoofdstuk 2 goed toepasbaar is, al zijn de voorwaarden strenger dan strikt noodzakelijk. Dat wil zeggen, door de specifieke eigenschappen van ieder van de problemen uit te buiten kan men veelal soortgelijke resultaten afleiden onder zwakkere voorwaarden.

In hoofdstuk 5 wordt een nieuw SLP concept geïntroduceerd onder de naam "geïntegreerde kansbeperkingen" (ICC's). Evenals de gebruikelijke kansbeperkingen beperken ICC's het risico van ontoelaatbaarheid; het verschil is evenwel dat bij ICC's ook rekening wordt gehouden met de omvang waarmee de beperkingen worden geschonden. In dat opzicht komen modellen met ICC's overeen met recourse modellen; in modellen van het laatste type worden kosten van ontoelaatbaarheid ingevoerd maar dat is niet noodzakelijk bij het gebruik van ICC's. Het blijkt dat ICC's behalve aantrekkelijke conceptuele eigenschappen ook wiskundige voordelen hebben boven gewone kansbeperkingen. Bovendien wordt door een toepassing van de dualiteitstheorie aangetoond, dat er een natuurlijke equivalentie bestaat tussen sommige modellen met ICC's en sommige recourse modellen.

Het is bekend dat SDP problemen over eindig veel stadia kunnen worden opgelost door middel van een achterwaartse recursie. Dat de recursie goed is gedefinieerd en optimale strategieën karakteriseert is evenwel alleen bij eindige toestands- en actieruimtes vanzelfsprekend; in het algemene geval kunnen complicaties optreden die te maken hebben met de meetbaarheid van functies en existentie van integralen. Nadat de relatie tussen het SDP probleem en het recursief algoritme in hoofdstuk 4 is bestudeerd met behulp van de dualiteitstheorie voor LPM problemen, worden in hoofdstuk 6 voorwaarden geformuleerd die niet alleen garanderen dat de recursie goed is gedefinieerd, maar die ook voldoende zijn voor het bestaan van optimale strategieën. Het bewijs is gebaseerd op een meetbare-selectie stelling, en maakt gebruik van de theorie van normale integranden. Euclidische toestandsruimten en actieruimten worden beschouwd, en binnen dit kader zijn de voorwaarden zwakker dan elders in de literatuur. Tevens wordt aangetoond dat de voorwaarden

geschikt kunnen worden toegepast op een betrekkelijk algemene klasse van productie-voorraad problemen.

Een van de bekendste SLP problemen betreft project planning. Een project bestaat uit een aantal activiteiten, tezamen met gegeven volgorde-relaties die door een netwerk kunnen worden voorgesteld. Bij de activiteiten behoren tijdsduren die met de volgorde-relaties de minimale tijdsduur van het project bepalen. Wanneer een contract over de tijdsduur van het project moet worden afgesloten, terwijl de tijdsduren van de activiteiten stochastische variabelen zijn, ontstaan het SLP probleem dat in hoofdstuk 7 wordt behandeld. Met name wordt ingegaan op de complicatie, dat in het algemeen slechts weinig informatie beschikbaar is omtrent de simultane kansverdeling van de tijdsduren. De gekozen formulering is van het minimax type. Eerst wordt ervan uitgegaan, dat de marginale verdelingen volledig bekend zijn, en worden met behulp van de dualiteitstheorie voor LPM problemen de ongunstigste simultane kansverdelingen gekarakteriseerd. Het blijkt dat het duale probleem is te reduceren tot een eindig dimensionaal convex minimaliseringsprobleem, dat op zijn beurt weer is te dualiseren tot een optimaliseringsprobleem betreffende stromen in het project netwerk. Vervolgens wordt aangetoond, dat deze analyse ook toepasbaar is indien slechts beperkte informatie over de marginale verdelingen beschikbaar is, bijvoorbeeld alleen de gegevens die door de bekende heuristische methode PERT worden gebruikt. Tenslotte wordt aangetoond, dat de minimax formulering praktische waarde heeft, omdat de berekeningen betrekkelijk eenvoudig kunnen worden uitgevoerd.

Een eenvoudig productie-voorraad model (1 artikel, eindig veel perioden, lineaire productie-, voorraad- en tekortkosten) wordt in hoofdstuk 8 besproken. Twee gevallen worden beschouwd: eerst wordt ervan uitgegaan dat alle vragen deterministisch zijn, en daarna worden de vragen als (mogelijk onderling afhankelijke) stochastische variabelen opgevat met een bekende simultane kansverdeling. In het stochastische geval wordt tevens verondersteld dat in iedere periode de in het verleden gerealiseerde vragen bekend zijn, terwijl de beslissing over de productie genomen moet worden vóórdat de realisatie van de toekomstige vragen wordt waargenomen. Gewoonlijk worden productie-voorraad problemen opgevat als SDP problemen, en opgelost door middel

van een achterwaarts probleem geformuleerd beslissingsvariabelen vragen. In deze formuleren. In het deterministisch te interpreteren als een "prijsstelsel" d. anticiperend moeten het duale probleem opgelost wel in het deterministisch zulke "duale recursiesamen te hangen met de ste duale recursie in van de functies die tweede duale recursie treden. Door de eerste uitdrukkingen gevonden stochastische geval kansen op bepaalde g

17251
1985

algemene klasse

et planning. Een
met gegeven volg-
esteld. Bij de
laties de minimale
et over de tijdsduur
dsduren van de ac-
et SLP probleem dat
an op de compli-
beschikbaar is om-
e gekozen formu-
gegaan, dat de
met behulp van
e simultane
duale probleem is
aliseringsprobleem,
aliseringsprobleem
s wordt aangetoond,
erke informatie
eeld alleen de ge-
worden gebruikt.
g praktische
oudig kunnen wor-

, eindig veel
(en) wordt in
eerst wordt
en daarna worden
stische varia-
In het sto-
ere periode de
rijl de beslis-
realisatie van
rden productie-
ost door middel

van een achterwaartse recursie. In dit laatste hoofdstuk wordt het probleem geformuleerd als een meerstadia SLP probleem; hierin zijn de beslissingsvariabelen niet-anticiperende functies van de gerealiseerde vragen. In deze formulering laat het probleem zich gemakkelijk dualiseren. In het deterministische geval zijn de optimale duale variabelen te interpreteren als de lengte van de kortste paden in het achterliggende netwerk. In het stochastische geval kunnen ze worden beschouwd als een "prijssysteem" dat samenhangt met de eis dat alle producties niet-anticiperend moeten zijn. Evenals het oorspronkelijke probleem kan ook het duale probleem opgelost worden met behulp van achterwaartse recursie. Zowel in het deterministische als in het stochastische geval worden twee zulke "duale recursies" geformuleerd. De duale recursies blijken nauw samen te hangen met de gebruikelijke "primaire" SDP-recursie. De eerste duale recursie is op te vatten als een recursie voor de afgeleiden van de functies die optreden in de primaire recursie, terwijl in de tweede duale recursie de geconjugeerden van deze primaire functies optreden. Door de eerste duale recursie op te lossen worden expliciete uitdrukkingen gevonden voor de oplossing van het duale probleem; in het stochastische geval wordt de duale oplossing beschreven in termen van kansen op bepaalde gebeurtenissen.